

基于推土机距离的证据冲突强度量方法

王欣^{1,2}, 付威¹

(1. 黑龙江大学自动化系, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 黑龙江省信息融合估计与检测重点实验室, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 针对 D-S (Dempster-Shafer) 证据理论中的冲突因子 k 不能有效度量证据之间的冲突程度的问题, 首先提出了证据冲突强度量函数需要满足的期望特征, 然后提出了一种新的基于推土机距离的证据冲突度量方法。该方法不要求不同证据有相同的焦元数量, 并且可以直接计算含有非单子集命题的证据冲突。理论和实验表明, 所提方法给出的冲突度量大小能够正确表征 2 个证据间冲突的程度, 并具有证据冲突强度量函数的所有期望特征, 表明所提方法是一种有效的证据冲突强度量方法。

关键词: D-S 证据理论; 证据冲突强度量函数; 期望特征; 推土机距离

中图分类号: TP274

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2022094

Strong measurement method of evidence conflict based on earth mover's distance

WANG Xin^{1,2}, FU Wei¹

1. Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin 150080, China

2. Key Laboratory of Information Fusion Estimation and Detection in Heilongjiang Province, Harbin 150080, China

Abstract: Aiming at the problem that the conflict factor k in D-S evidence theory cannot effectively measure the degree of conflict between two bodies of evidence (BoEs), the expected features of evidence conflict strong measurement function (ECSMF) were proposed, and then a new method of evidence conflict measurement based on earth mover's distance (EMD) was put forward. The same number of focal elements between different BoEs was not required and the evidence conflict with non-singleton propositions could be directly calculate. The proposed method did not require The theory and experiments show that the size of conflict measure proposed can correctly represent the degree of conflict between two BoEs, and has all the expected features of ECSMF, which is an effective method of evidence conflict strong measurement.

Keywords: D-S evidence theory, evidence conflict strong measurement function, expected feature, earth mover's distance

0 引言

近年来, 多传感器信息融合技术受到了极大的关注, 并被广泛应用于目标检测^[1]、医疗^[2-3]和金融^[4]等领域。在信息融合领域中, 为了有效地整合来自不同传感器的信息, 选择一种合适的融合策略是至关重要的。作为多传感器信息融合技术的重要方法之一, D-S

(Dempster-Shafer) 证据理论具有显著的优势, 它既能有效地表达不确定信息, 又能在没有先验信息的情况下融合证据^[5-6]。因此, D-S 证据理论在风险评估^[7]、模式识别^[8]和故障诊断^[9]等领域得到了广泛的应用。

在实际应用中, 信息种类的多样性、环境的复杂性和传感器的局限性使信息源一般具有较强的不确定性和高冲突性^[10], 在使用 D-S 证据理论融合

收稿日期: 2022-01-12; 修回日期: 2022-04-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61573132); 黑龙江省自然科学基金重点资助项目 (No.ZD2021F003); 联合引导基金资助项目 (No.LH2020G008); 黑龙江省省属高等学校基本科研业务费基础研究基金资助项目 (No.KJCX201809)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61573132), Key Project of Natural Science Foundation of Heilongjiang Province (No.ZD2021F003), Joint Guidance Project (No.LH2020G008), Basic Research Fund in Higher Educational Institutions of Heilongjiang Province (No.KJCX201809)

高冲突证据时，往往会出现反直观的结果，如 Zadeh^[11]提出的 0 信任和 1 信任等反直观结果。针对这一问题，许多研究者提出了不同的冲突度量方法，大致可以分为两类：一类是在度量证据间的冲突程度前对证据进行预修正，另一类是在原始证据的基础上直接度量证据间的冲突程度。

对证据进行预修正的方法也可分为两类，一类是通过构造关系矩阵来修正证据，如宋亚飞等^[12]利用关系矩阵对证据进行修正，然后将测得的修正后的证据之间的夹角余弦值作为证据间的冲突程度；孙贵东等^[13]基于核关系矩阵对证据进行修正，然后提出了一种证据冲突度量方法。另一类是基于 Pignistic 概率转换 (PPT, Pignistic probability transform) 的方法，如 Liu^[14]定义了 Pignistic 概率距离来度量由 PPT 修正后的证据间的冲突程度；郭兴林等^[15]提出了一种基于 PPT 和奇异值分解的证据冲突度量方法；Cai 等^[16]将 PPT 推广为 Pignistic 信任转换 (PBT, Pignistic belief transform)，以此将非单子集焦元的信任分配给多个集合，并提出了一种新的证据冲突度量方法，但是这种方法的复杂度较高，不便于实际应用。

度量未修正证据间的冲突程度主要是通过计算证据间的距离、熵或相关系数来实现的。Jousselme 等^[17]提出将证据间的 Jousselme 距离作为证据间的冲突度量。邓勇等^[18]引入随机变量的偏熵和关联熵，将证据间的关联系数作为证据间的冲突度量。Xiao^[19-20]提出了 BJS (belief Jensen-Shannon) 散度和 RB (reinforced belief) 散度函数，并将其测出的证据间的广义距离作为证据间的冲突程度。李军伟等^[21]根据最大最小法定义了新的相关系数，并提出了一种基于 Einstein 算子的冲突度量方法。Jiang^[22]提出一种考虑焦元之间的不相交性和差异性的相关系数，以此来度量证据间的冲突程度。

尽管上述方法都可以度量证据间的冲突程度，但也存在一些不足。若使用第一类方法，即选择对证据进行预修正，则修正后的基本概率指派 (BPA, basic probability assignment) 将不再满足归一性，而且很难最大限度地保留原始信息的不确定性。而第二类方法要求不同证据的焦元数量完全相同，如果焦元数量不同，那么需要补齐焦元。上述问题均会在不同程度上影响最终的合成结果。

鉴于以上原因，本文在文献[12,20]的基础上提出了证据冲突强度测量函数 (ECSMF, evidence conflict strong measurement function) 的期望特征，并

用实例说明了已有证据冲突度量方法的不足。

根据 ECSMF 的期望特征的要求，本文提出了一种基于推土机距离 (EMD, earth mover's distance) 的证据冲突度量方法，即信任推土机距离 (BEMD, belief earth mover's distance)。推土机距离又叫作 Wasserstein 距离，它最初是为了解决运输问题提出的，后来由 Rubner 等^[23]提出作为一种图像检索方法而得到了广泛的应用^[24-25]。本文提出的信任推土机距离方法，不仅满足 ECSMF 的所有期望特征，而且可以将单元素之间的距离概念自然地扩展到元素集或分布之间的距离概念，进而有效地度量证据间的冲突程度。

本文做了如下创新性工作：1) 提出了 ECSMF 的期望特征；2) 提出了信任推土机距离方法，理论和实验证明了该方法满足 ECSMF 的所有期望特征；3) 提出的信任推土机距离方法不需要对证据进行预修正，也不要求不同证据的焦元完全相同，可以直接计算含有复合元素的证据之间的冲突，从而避免了高维矩阵运算，减小了计算负担，理论和实验证明了该方法的有效性。

1 证据冲突强度测量函数的期望特征

定义 1 识别框架。在 D-S 证据理论中，假设 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$ 是一个两两互斥又可穷举元素的完备集合，则称 Θ 为识别框架。其中， θ_i 是识别框架 Θ 中的一个单子集命题， N 是单子集命题的个数。

定义 2 BPA 函数。设 Θ 为识别框架，则 Θ 中的所有单子集命题组成的集合称为 Θ 的幂集，记为 2^Θ 。假设任意命题 $A \in 2^\Theta$ ，若映射 m 满足

$$\begin{cases} 0 \leq m(A) \leq 1 \\ \sum_{A \in \Theta} m(A) = 1 \\ m(\emptyset) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

则称 m 为识别框架 Θ 上的 BPA 函数或质量函数，其中 $m(A)$ 为 A 的 BPA 或质量，表示对命题 A 的基本信度。当 $m(A) > 0$ 时，则称子集 A 为一个焦元，所有焦元的并集称为核，记作 $\kappa(m)$ 。

证据冲突的本质在于不同证据对相同命题的支持度存在差异，如果不同证据对同一命题的支持度接近，那么它们之间的冲突就很小；反之，则说明 2 个证据的冲突较大。文献[12]提出了证据相关系数法来测量冲突，给出了相关系数满足对称性、规范性、同一性和不反直观性。文献[20]提出了基

于 RB 散度来测量冲突, 给出了其对称性、规范性、同一性和三角不等式的性质。综合文献[12,20]所提方法的性质, 下面给出证据冲突强度量函数应该满足的数学特征。

定义 3 ECSMF 的期望特征。在同一识别框架 Θ 下, 存在 2 个证据 m_1 和 m_2 , 则两者的冲突强度量函数 $f(m_1, m_2)$ 的期望特征如下。

- 1) 对称性: $f(m_1, m_2) = f(m_2, m_1)$ 。
- 2) 规范性: $0 \leq f(m_1, m_2) \leq 1$ 。
- 3) 同一性: 当且仅当 $m_1 = m_2$ 时, $f(m_1, m_2) = 0$ 。
- 4) 互斥性: 当且仅当 $(\cup p_i) \cap (\cup q_j) = \emptyset$ 时, $f(m_1, m_2) = 1$, 其中 p_i 和 q_j 分别为 m_1 和 m_2 的焦点。
- 5) 三角不等式: 若在 Θ 下还存在证据 m_3 , 则 $f(m_1, m_3) \leq f(m_1, m_2) + f(m_2, m_3)$, $\forall m_1, m_2, m_3$ 。
- 6) 不反直观性: 当证据变化时, $f(m_1, m_2)$ 的变化趋势与直观分析一致。

注 1 如果 3) 和 4) 分别改为: 当且仅当 $m_1 = m_2$ 时, $f(m_1, m_2) = 1$; 当且仅当 $(\cup p_i) \cap (\cup q_j) = \emptyset$ 时, $f(m_1, m_2) = 0$, 则称 $f(m_1, m_2)$ 为相似强度量函数。

注 2 由于冲突度量和相似度量是一对逆命题, 因此如果 $f(m_1, m_2)$ 是冲突强度量, 则 $1 - f(m_1, m_2)$ 是相似度量, 但它却不一定是相似强度量, 因为它不一定满足三角不等式。

2 基本概述

2.1 现有冲突度量方法存在的问题

2.1.1 D-S 组合规则

定义 4 D-S 组合规则。假设识别框架 Θ 下的 2 个证据为 m_1 和 m_2 , 其相应的焦点分别为 A_i 和 B_j , 设 $k < 1$, 则 Dempster 组合规则 (也称为 2 个证据的正交和) 为

$$m(A) = m_1 \oplus m_2(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \frac{\sum_{A_i \cap B_j = A} m_1(A_i) m_2(B_j)}{1 - k}, & A \neq \emptyset \end{cases} \quad (2)$$

其中, k 为度量冲突的冲突因子, 计算式为

$$k = \sum_{A_i \cap B_j = \emptyset} m_1(A_i) m_2(B_j) \quad (3)$$

事实上, 冲突因子 k 不能很好地反映证据之间

的冲突程度, 下面通过例 1 来说明这一问题。

例 1 假设在识别框架 $\Theta = \{A, B, C\}$ 下, 存在如下 2 个证据 m_1 和 m_2 。

$$m_1: m_1(A) = 0.40, m_1(B) = 0.30, m_1(C) = 0.30$$

$$m_2: m_2(A) = 0.40, m_2(B) = 0.30, m_2(C) = 0.30$$

根据式(3)计算证据 m_1 和 m_2 之间的冲突程度, 则有 $k = 0.66$, 即表明 2 个证据存在一定的冲突。然而证据 m_1 和 m_2 是完全相同的, 因此, 冲突因子 k 不能有效地度量证据间的冲突程度。这表明冲突因子 k 不满足 ECSMF 的期望特征的同一性。

2.1.2 Pignistic 冲突度量

定义 5 Pignistic 冲突度量^[14]。假设识别框架 Θ 中的 2 个证据分别为 m_1 和 m_2 , 则证据间的 Pignistic 概率距离为

$$\text{difBetP}_{m_i}^{m_2} = \max_{A \in \Theta} \left(\left| \text{BetP}_{m_1}(A) - \text{BetP}_{m_2}(A) \right| \right) \quad (4)$$

其中, BetP_{m_i} 为 m_i 的 Pignistic 概率转换, 即

$$\text{BetP}_{m_i}(A) = \sum_{B \in \Theta} \frac{|B \cap A|}{|B|} \frac{m_i(B)}{1 - m_i(\emptyset)}, i = 1, 2 \quad (5)$$

例 2 假设在识别框架 $\Theta = \{A, B, C, D, E, F\}$ 下, 存在 2 个证据 m_1 和 m_2 , 它们的 BPA 分别为

$$m_1: m_1(A) = \frac{1}{3}, m_1(B) = \frac{1}{3}, m_1(C) = \frac{1}{3}$$

$$m_2: m_2(D) = \frac{1}{3}, m_2(E) = \frac{1}{3}, m_2(F) = \frac{1}{3}$$

由式(4)和式(5)可知, $\text{difBetP}_{m_1}^{m_2} = \frac{1}{3}$ 。从 2 个证据的 BPA 可以看出, 证据 m_1 支持的命题为 A 、 B 和 C , 而证据 m_2 支持的命题为 D 、 E 和 F , 由此可见 2 个证据是完全冲突的, 然而 Pignistic 冲突度量值为 $\frac{1}{3}$, 因此它不满足 ECSMF 的期望特征的互斥性。

2.1.3 Jousselme 冲突度量

定义 6 假设在包含 N 个单子集命题的识别框架 Θ 下, 证据 m 的 BPA 的向量形式为

$$\mathbf{m} = [m(A_1), m(A_2), \dots, m(A_{2^N})] \quad (6)$$

其中, $m(A_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{2^N} m(A_i) = 1$, $A_i \in 2^\Theta$ 。

定义 7 Jousselme 冲突度量^[17]。假设识别框架 Θ 下的 2 个证据为 m_1 和 m_2 , 相应的向量形式为 \mathbf{m}_1 和 \mathbf{m}_2 , 则证据间的 Jousselme 证据距离定义为

$$d_{\text{BPA}}(m_1, m_2) = \sqrt{\frac{1}{2}(m_1 - m_2)D(m_1 - m_2)^T} \quad (7)$$

$$D = \left[\frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i \cup A_j|} \right]_{2^{|\Theta|} \times 2^{|\Theta|}}, A_i, A_j \in 2^\Theta \quad (8)$$

其中， $|\Theta|$ 表示识别框架的基数，即识别框架所包含元素的个数； A_i 和 A_j 分别表示证据 m_1 和 m_2 的焦点；上标 T 表示向量的转置。

例 3 仍以例 2 为例，由式(7)和式(8)可得 $d_{\text{BPA}}(m_1, m_2) = 0.471$ ，因此该方法也不满足互斥性。

2.1.4 BJS 散度冲突度量

定义 8 BJS (belief Jensen-Shannon) 散度冲突度量^[19]。假设识别框架 Θ 中的 2 个证据为 m_1 和 m_2 ， A_i 为 m_1 或 m_2 的焦点，则 m_1 和 m_2 的 BJS 散度冲突度量为

$$\text{BJS}(m_1, m_2) = \frac{1}{2} \left[S \left(m_1, \frac{m_1 + m_2}{2} \right) + S \left(m_2, \frac{m_1 + m_2}{2} \right) \right] \quad (9)$$

其中， $S(m_1, m_2)$ 是 Kullback-Leibler 散度，计算式为

$$S(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^n m_1(A_i) \text{lb} \frac{m_1(A_i)}{m_2(A_i)} \quad (10)$$

例 4 假设在识别框架 $\Theta = \{A, B, C\}$ 下，3 个证据 m_1 、 m_2 和 m_3 的 BPA 分别为

$$m_1: m_1(A) = 0.6, m_1(B) = 0.2, m_1(C) = 0.2$$

$$m_2: m_2(A) = 0, m_2(B) = 0.9, m_2(C) = 0.1$$

$$m_3: m_3(A) = 0.8, m_3(B) = 0.1, m_3(C) = 0.1$$

由式(9)可知， $\text{BJS}(m_1, m_2) = 0.4860$ ， $\text{BJS}(m_1, m_3) = 0.0349$ ， $\text{BJS}(m_2, m_3) = 0.6655$ 。显然 $\text{BJS}(m_2, m_3) > \text{BJS}(m_1, m_2) + \text{BJS}(m_1, m_3)$ ，这表明 BJS 不满足 ECSMF 的期望特征的三角不等式。

2.2 推土机距离

推土机距离^[23]是一种通用且灵活的度量方法，它最初被设计用来计算运输问题中从一个分配点到另一个分配点的最低成本。后来，Rubner 等^[23]提出将 EMD 用于图像检索，测量两组带权元素或分布之间的距离。

定义 9 推土机距离。假设有两组图像的数据，第一组数据 $P = \{(p_1, \omega_{p_1}), \dots, (p_\alpha, \omega_{p_\alpha})\}$ 含有 α 个特征，其中 p_i 表示 P 中的第 i 个特征， ω_{p_i} 表示 p_i 的权重；第二组数据 $Q = \{(q_1, \omega_{q_1}), \dots, (q_\beta, \omega_{q_\beta})\}$ 含有 β 个特征，其中 q_j 表示 Q 中的第 j 个特征， ω_{q_j} 表示 q_j 的

权重。则两组离散数据之间的 EMD 为

$$\text{EMD}(P, Q) = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} d_{ij} f_{ij}}{\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} f_{ij}} \quad (11)$$

其中， d_{ij} 表示随机变量 p_i 到 q_j 之间的距离， f_{ij} 表示由 ω_{p_i} 到 ω_{q_j} 的最小转移量，它们受到如下约束

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} d_{ij} f_{ij} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} f_{ij} \geq 0, 1 \leq i \leq \alpha, 1 \leq j \leq \beta \\ \sum_{j=1}^{\beta} f_{ij} \leq \omega_{p_i}, 1 \leq i \leq \alpha \\ \sum_{i=1}^{\alpha} f_{ij} \leq \omega_{q_j}, 1 \leq j \leq \beta \\ \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} f_{ij} = \min \left(\sum_{i=1}^{\alpha} \omega_{p_i}, \sum_{j=1}^{\beta} \omega_{q_j} \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

由式(12)可知，转移过程是由 P 转移到 Q 的， P 中所有特征可以转移的量不超过它们本身的权重， Q 中每个特征接收的量不超过相应特征的权重，两组数据可以具有不同的总权重，EMD 以较小的总权重作为归一化因子。

3 信任推土机距离

3.1 信任推土机距离的定义

针对已有的冲突度量方法不能很好地度量证据间的冲突程度的情况，本文提出了一种基于 EMD 的证据冲突度量方法，即信任推土机距离，该方法对冲突程度的测量满足 ECSMF 的所有期望特征，能够正确表征证据间的冲突大小，是一种有效的证据冲突强度度量方法。

定义 10 BEMD。假设在完备的识别框架 Θ 下存在如下 2 个证据

$$m_1 = ([\{p_1\}, m_1(p_1)], \dots, [\{p_M\}, m_1(p_M)]) \quad (13)$$

$$m_2 = ([\{q_1\}, m_2(q_1)], \dots, [\{q_N\}, m_2(q_N)]) \quad (14)$$

则证据间的 BEMD 为

$$\text{BEMD}(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} v_{ij} \quad (15)$$

$$\Gamma_{ij} = 1 - \frac{|p_i \cap q_j|}{|p_i \cup q_j|} \quad (16)$$

其中, Γ_{ij} 是 Jaccard 集合距离, 表示从焦元 p_i 到焦元 q_j 的距离; v_{ij} 由式(17)中的优化问题解出

$$\min \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} v_{ij} \quad (17)$$

$$\begin{cases} v_{ij} \geq 0, 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N & (17a) \\ \sum_{j=1}^N v_{ij} = m_1(p_i), 1 \leq i \leq M & (17b) \\ \sum_{i=1}^M v_{ij} = m_2(q_j), 1 \leq j \leq N & (17c) \\ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N v_{ij} = 1 & (17d) \end{cases}$$

3.2 信任推土机距离的算法复杂度分析

在 BEMD 算法中, 最耗时的计算就是求解式(17)的最优解, 式(17)是一个线性规划问题, 即在式(17)的条件下使 $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} v_{ij}$ 最小, 这可以借助 MATLAB 的 linprog 函数求解 v_{ij} , 在求解 BEMD 时可使用内点法, 内点法的计算复杂度为 $O(N^3 \log N)$ [23], 其中 N 代表证据中焦元的数量 [23]。通过生成焦元数量从 1 到 1 000 的证据, 测试 BEMD 的时间性能, 并记录计算 BEMD 时的 CPU 耗时, 结果如图 1 所示。此实验环境中使用的电脑处理器为 Intel(R) Core(TM) i5-9400F CPU @ 2.90 GHz, 软件为 MATLAB 2019a, 图 1 与内点法的复杂度基本一致, 说明了其正确性。

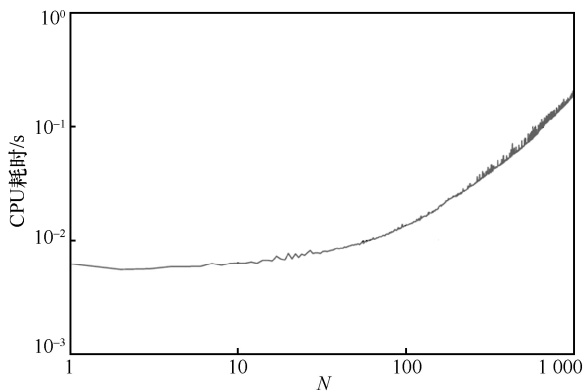


图 1 改变证据焦元数量时计算 BEMD 的时间双对数曲线

3.3 信任推土机距离的性质

定理 1 假设在完备的识别框架 Θ 下有 2 个证据 m_1 和 m_2 , 其焦元分别为 p_1, p_2, \dots, p_M 和 q_1, q_2, \dots, q_N , 则信任推土机距离 $\text{BEMD}(m_1, m_2)$ 是证据 m_1 和 m_2 的 ECSMF, 即满足定义 3 中 ECSMF 的所有期望特征。

- 1) 对称性: $\text{BEMD}(m_1, m_2) = \text{BEMD}(m_2, m_1)$ 。
- 2) 规范性: $0 \leq \text{BEMD}(m_1, m_2) \leq 1$ 。
- 3) 同一性: 当且仅当 $m_1 = m_2$ 时, $\text{BEMD}(m_1, m_2) = 0$ 。
- 4) 互斥性: 当且仅当 $(\cup p_i) \cap (\cup q_j) = \emptyset$ 时, $\text{BEMD}(m_1, m_2) = 1$ 。
- 5) 三角不等式: 若在 Θ 下还存在证据 m_3 , 则 $\text{BEMD}(m_1, m_3) \leq \text{BEMD}(m_1, m_2) + \text{BEMD}(m_2, m_3)$ 。
- 6) 不反直观性: 当证据变化时, $\text{BEMD}(m_1, m_2)$ 的变化趋势与直观分析一致。

证明

1) 对称性

假设 $\text{BEMD}(m_1, m_2)$ 由式(15)~式(17)计算。不妨设 $\text{BEMD}(m_2, m_1) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \bar{\Gamma}_{ji} \bar{v}_{ji}$, 其中 $\bar{\Gamma}_{ji} = 1 - \frac{|q_j \cap p_i|}{|q_j \cup p_i|}$, 令 $\bar{\Gamma}_{ji} = \Gamma_{ij}$, 则此时最优解 $\{\bar{v}_{ji}\}$ 满足

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \bar{\Gamma}_{ji} \bar{v}_{ji} \\ \bar{v}_{ji} \geq 0, 1 \leq j \leq N, 1 \leq i \leq M \\ \sum_{i=1}^M \bar{v}_{ji} = m_2(q_j), 1 \leq j \leq N \\ \text{s.t.} \sum_{j=1}^N \bar{v}_{ji} = m_1(p_i), 1 \leq i \leq M \\ \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \bar{v}_{ji} = 1 \end{cases} \quad (18)$$

比较式(17)和式(18)可得 $\bar{v}_{ji} = v_{ij}$, 则有

$$\begin{aligned} \text{BEMD}(m_2, m_1) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \bar{\Gamma}_{ji} \bar{v}_{ji} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \Gamma_{ij} v_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} v_{ij} = \text{BEMD}(m_1, m_2) \end{aligned} \quad (19)$$

因此, $\text{BEMD}(m_1, m_2)$ 满足对称性。

2) 规范性

因为 $0 \leq \frac{|p_i \cap q_j|}{|p_i \cup q_j|} \leq 1$, 所以

$$0 \leq \Gamma_{ij} \leq 1 \quad (20)$$

由式(17a)、式(17d)和式(20)可得

$$0 \leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} v_{ij} \leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N v_{ij} = 1 \quad (21)$$

由式(15)和式(21)可得 $0 \leq \text{BEMD}(m_1, m_2) \leq 1$ ，即 $\text{BEMD}(m_1, m_2)$ 满足规范性。

3) 同一性

充分性：当 $m_1 = m_2$ 时，有 $p_i = q_i$ ， $m_1(p_i) = m_2(q_i)$ ， $M = N$ 。

由式(21)可知， $\text{BEMD}(m_1, m_2)$ 的最小值为0。因此当 $m_1 = m_2$ 时，只需找到一组最优解 $\{v_{ij}\}$ 满足式(17)的约束，且能使 $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} v_{ij} = 0$ 即可。

对于 Γ_{ij} ，当 $i = j$ 时，可得 $\Gamma_{ii} = 1 - \frac{|p_i \cap p_i|}{|p_i \cup p_i|} = 0$ ，此时令 $v_{ii} = m_1(p_i)$ ；当 $i \neq j$ 时，令 $v_{ij} = 0$ ，此时 $\{v_{ij}\}$ 满足式(17)的所有约束，同时 $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} v_{ij}$ 达到最小值0。因此，当 $m_1 = m_2$ 时， $\text{BEMD}(m_1, m_2) = 0$ 。

必要性：当 $\text{BEMD}(m_1, m_2) = 0$ 时，即

$$\text{BEMD}(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} v_{ij} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{|p_i \cap q_j|}{|p_i \cup q_j|} \right) v_{ij} = 0 \quad (22)$$

因为 v_{ij} 满足约束式(17)，所以由式(17a)和式(21)可知，对于式(22)中的每一项，只有 $\Gamma_{ij} = 0$ 或 $v_{ij} = 0$ 才能使式(22)成立。因此当 $\Gamma_{ij} \neq 0$ 时，即 $p_i \neq q_j$ 时只有取

$$v_{ij} = 0, p_i \neq q_j \quad (23)$$

才能保证式(22)成立。

当 $\Gamma_{ij} = 0$ ，即 $p_i = q_j$ 时，为了使 v_{ij} 满足式(17b)和式(17c)，同时考虑式(23)，则有

$$v_{ij} = m_1(p_i) = m_2(q_j), p_i = q_j \quad (24)$$

这表明，当 $\text{BEMD}(m_1, m_2) = 0$ 时，可得 $m_1 = m_2$ 。即 $\text{BEMD}(m_1, m_2)$ 满足同一性。

4) 互斥性

充分性：假设证据 m_1 和 m_2 的焦点 p_i 和 q_j 满足 $(\cup p_i) \cap (\cup q_j) = \emptyset$ ，则有

$$\Gamma_{ij} = 1 - \frac{|p_i \cap q_j|}{|p_i \cup q_j|} = 1 \quad (25)$$

由式(15)、式(17d)和式(25)可得

$$\text{BEMD}(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N v_{ij} = 1 \quad (26)$$

必要性(反证法)：只需证明当 $\text{BEMD}(m_1, m_2) = 1$ 时

$$(\cup p_i) \cap (\cup q_j) = \emptyset \quad (27)$$

假设对 $\forall i, j$ ，存在一个 $\Gamma_{ij} < 1$ ，则令 $v_{ij} \neq 0$ ，由式(15)和式(17d)可知， $\text{BEMD}(m_1, m_2) < 1$ ，这与 $\text{BEMD}(m_1, m_2) = 1$ 矛盾。这表明对 $\forall i, j$ ， $\Gamma_{ij} = 1$ ，即 m_1 和 m_2 焦点之间没有交集，即式(27)成立。

综上， $\text{BEMD}(m_1, m_2)$ 满足互斥性。

5) 三角不等式

假设在识别框架 Θ 下，还存在如下证据 m_3

$$m_3 = ([\{r_1\}, m_3(r_1)], \dots, [\{r_K\}, m_3(r_K)]) \quad (28)$$

假设 $\{v_{ij}\}$ 和 $\{g_{jk}\}$ 分别是 m_1 与 m_2 、 m_2 与 m_3 的 BEMD 的最优解，则 $\{g_{jk}\}$ 满足

$$\sum_{j=1}^N g_{jk} = m_3(r_k) \quad (29)$$

设 o_{ijk} 表示从焦点 p_i 转移到 q_j 再转移到 r_k 的质量，则有

$$v_{ij} = \sum_{k=1}^K o_{ijk}, g_{jk} = \sum_{i=1}^M o_{ijk} \quad (30)$$

令

$$h_{ik} = \sum_{j=1}^N o_{ijk} \quad (31)$$

下面，证明 $\{h_{ik}\}$ 为 p_i 到 r_k 最优化问题的可行解(不一定是最优解)，只需证明 $\{h_{ik}\}$ 满足式(17)中的4个约束即可。显然

$$h_{ik} \geq 0 \quad (32)$$

由式(17b)、式(29)~式(31)可得

$$\sum_{i=1}^M h_{ik} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N o_{ijk} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M o_{ijk} = \sum_{j=1}^N g_{jk} = m_3(r_k) \quad (33)$$

$$\sum_{k=1}^K h_{ik} = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N o_{ijk} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K o_{ijk} = \sum_{j=1}^N v_{ij} = m_1(p_i) \quad (34)$$

由式(17d)、式(30)和式(31)可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^K h_{ik} &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N o_{ijk} = \\ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K o_{ijk} &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N v_{ij} = 1 \end{aligned} \quad (35)$$

式(32)~式(35)表明， $\{h_{ik}\}$ 为 p_i 到 r_k 最优化问题的可行解。因此有

$$\text{BEMD}(m_1, m_3) \leq \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{|p_i \cap r_k|}{|p_i \cup r_k|} \right) h_{ik} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{|p_i \cap r_k|}{|p_i \cup r_k|} \right) o_{ijk} \quad (36)$$

由 Jaccard 集合距离不等式^[26]有

$$1 - \frac{|p_i \cap r_k|}{|p_i \cup r_k|} \leq \left(1 - \frac{|p_i \cap q_j|}{|p_i \cup q_j|} \right) + \left(1 - \frac{|q_j \cap r_k|}{|q_j \cup r_k|} \right) \quad (37)$$

由式(36)和式(37)有

$$\begin{aligned} \text{BEMD}(m_1, m_3) &\leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{|p_i \cap q_j|}{|p_i \cup q_j|} \right) o_{ijk} + \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{|q_j \cap r_k|}{|q_j \cup r_k|} \right) o_{ijk} = \\ &\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{|p_i \cap q_j|}{|p_i \cup q_j|} \right) v_{ij} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{|q_j \cap r_k|}{|q_j \cup r_k|} \right) g_{jk} = \\ &\text{BEMD}(m_1, m_2) + \text{BEMD}(m_2, m_3) \end{aligned} \quad (38)$$

这表明 $\text{BEMD}(m_1, m_2)$ 满足三角不等式。

6) 不反直观性

不反直观性需要通过实例进行验证。为了验证当证据变化时，BEMD 的变化趋势与直观分析一

致，下面采用文献[17]中的例子来说明 BEMD 满足特征 6)，同时与文献[12,14,16-18,20]的冲突度量方法进行对比分析。

例 5 假设识别框架 $\Theta = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ 中有 2 个证据 m_1 和 m_2 ，每个证据的 BPA 为

$$m_1 : m_1(2, 3, 4) = 0.05, m_1(7) = 0.05, m_1(\Theta) = 0.1, m_1(A) = 0.8 \quad (39)$$

$$m_2 : m_2(1, 2, 3, 4, 5) = 1 \quad (40)$$

不同冲突度量方法的比较如表 1 所示，各证据冲突度量随 $|A|$ 变化的趋势如图 2 所示。

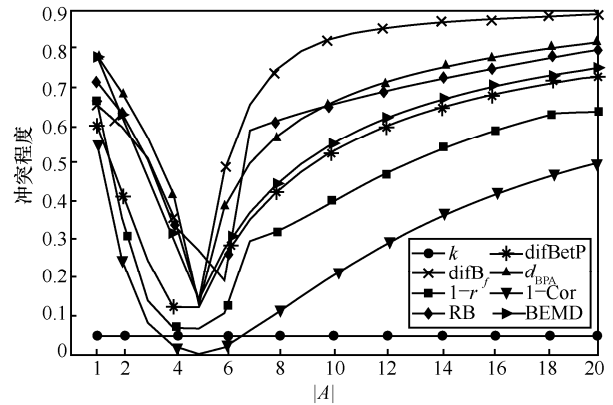


图 2 各证据冲突度量随 $|A|$ 变化的趋势

表 1 不同冲突度量方法的比较

A	k	1-Cor	difBetP	difB _f	d _{BPA}	1-r	RB	BEMD
{1}	0.050	0.560	0.605	0.657	0.786	0.669	0.717	0.785
{1,2}	0.050	0.248	0.426	0.598	0.686	0.358	0.633	0.625
{1,2,3}	0.050	0.084	0.248	0.516	0.570	0.142	0.512	0.465
{1,2,3,4}	0.050	0.024	0.125	0.365	0.423	0.071	0.342	0.305
{1,2,...,5}	0.050	0.003	0.125	0.143	0.132	0.069	0.274	0.145
{1,2,...,6}	0.050	0.020	0.258	0.484	0.388	0.109	0.195	0.278
{1,2,...,7}	0.050	0.064	0.355	0.656	0.503	0.299	0.589	0.374
{1,2,...,8}	0.050	0.107	0.425	0.746	0.571	0.323	0.613	0.445
{1,2,...,9}	0.050	0.153	0.480	0.795	0.619	0.356	0.634	0.501
{1,2,...,10}	0.050	0.197	0.525	0.824	0.655	0.393	0.653	0.545
{1,2,...,11}	0.050	0.239	0.560	0.841	0.684	0.430	0.670	0.581
{1,2,...,12}	0.050	0.278	0.591	0.852	0.708	0.465	0.686	0.612
{1,2,...,13}	0.050	0.315	0.617	0.860	0.728	0.497	0.702	0.637
{1,2,...,14}	0.050	0.348	0.639	0.867	0.745	0.526	0.716	0.659
{1,2,...,15}	0.050	0.378	0.658	0.872	0.759	0.552	0.730	0.678
{1,2,...,16}	0.050	0.406	0.675	0.876	0.773	0.576	0.743	0.695
{1,2,...,17}	0.050	0.430	0.689	0.880	0.785	0.597	0.756	0.710
{1,2,...,18}	0.050	0.453	0.702	0.883	0.795	0.616	0.768	0.723
{1,2,...,19}	0.050	0.474	0.714	0.886	0.805	0.634	0.780	0.735
{1,2,...,20}	0.050	0.493	0.725	0.889	0.813	0.637	0.792	0.745

由式(39)和式(40)可知，证据 m_1 主要支持 A ，证据 m_2 完全支持 $\{1,2,3,4,5\}$ ，而从表 1 和图 2 可知，随着 A 的变化，多数的证据冲突度量曲线整体呈先减小后增大的变化趋势，而冲突因子 k 的值一直为 0.05，这显然是反直观的，并且，当 $A = \{1,2,3,4,5\}$ 时，由直观分析可知证据 m_1 与 m_2 的冲突最小，而 RB 散度^[20]在 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ 时的冲突度量达到最小，这显然也是与直观相悖的。在本例中，因为 $\{1\}$ 与 $\{1,2,\dots,5\}$ 的 Jaccard 距离为 $\frac{4}{5}$ ，而 $\{1,2,\dots,20\}$ 与 $\{1,2,\dots,5\}$ 的 Jaccard 距离为 $\frac{3}{4}$ ，所以 $A = \{1\}$ 时证据间的冲突程度应比 $A = \{1,2,\dots,20\}$ 时证据间的冲突程度更高，冲突曲线应呈现出左高右低的趋势。在这些冲突度量方法中，只有 $1-r$ 、 $1-\text{Cor}$ 和 BEMD 的证据冲突度量曲线符合这种趋势。除此以外，与 $1-r$ 相比，BEMD 的证据冲突度量曲线较平滑，可以更精确地描述证据之间的冲突。而与 $1-\text{Cor}$ 相比，BEMD 的证据冲突度量结果更合理。以 $A = \{1,2,3,4,5\}$ 为例， $\text{BEMD}(m_1, m_2) = 0.145$ ，而 $1-\text{Cor}(m_1, m_2) = 0.03$ ，这说明证据相关系数认为证据 m_1 和 m_2 趋近于完全相同，但是证据 m_1 中仍含有其他命题，并且这些命题的质量不能忽略不计，这表明证据 m_1 和 m_2 之间仍然存在一定的冲突，BEMD 相比于证据相关系数可以更合理地度量出与直观分析相符的结果。上述分析表明，本文提出的 BEMD 具有良好的性能，当证据中存在一些非单子集命题时仍可以灵敏准确地反映证据之间的冲突程度，并且度量的冲突结果与直观分析相一致。本例验证了所提出的 BEMD 满足 ECSMF 的不反直观性。

4 算例分析

本节将通过实验来进一步验证 BEMD 满足 ECSMF 的所有期望特征，并通过与已有文献方法的比较分析阐述它的有效性。

例 6 假设识别框架 $\Theta = \{A, B\}$ 中有 2 个证据 m_1 和 m_2 ，它们的 BPA 分别为

$$m_1: m_1(A) = 1, m_1(B) = 0$$

$$m_2: m_2(A) = \lambda, m_2(B) = 1 - \lambda$$

当 λ 的变化范围为 $[0,1]$ 时，图 3 展示了 $1-\text{Cor}$ ^[12]、 $1-r$ ^[18]、BJS^[19]和 BEMD 随 λ 变化的冲突度量曲线。

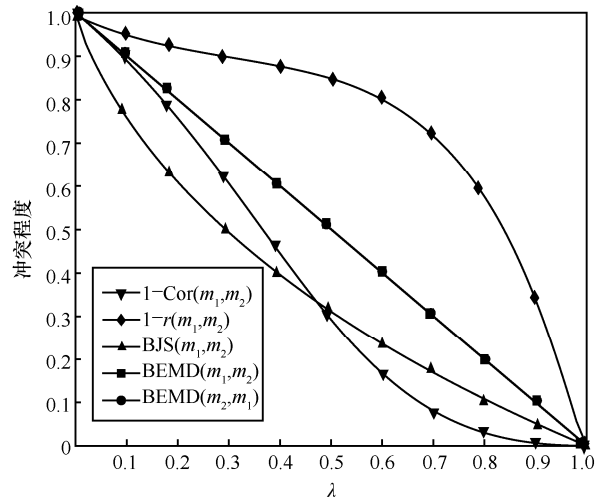


图 3 不同方法随 λ 变化的冲突度量曲线

图 3 所示的 4 种证据冲突度量方法的趋势基本相同，但 BEMD 的曲线随着 λ 的变化更接近线性，这说明了 BEMD 的优越性。由图 3 可知， $\text{BEMD}(m_1, m_2)$ 和 $\text{BEMD}(m_2, m_1)$ 的冲突度量曲线是一致的，这验证了 $\text{BEMD}(m_1, m_2)$ 满足对称性。在 λ 的变化过程中， $\text{BEMD} \in [0,1]$ ，并且当 $\lambda = 0$ 时 $\text{BEMD} = 1$ ，而当 $\lambda = 1$ 时 $\text{BEMD} = 0$ ，以上验证了 BEMD 满足 ECSMF 的期望特征 1)~特征 4)，即对称性、规范性、同一性和互斥性。

下面通过例 7 验证 BEMD 满足 ECSMF 的期望特征 5)，即三角不等式。

例 7 假设识别框架 $\Theta = \{A, B, C, D\}$ 中有 3 个证据 m_1 、 m_2 和 m_3 ，每个证据的 BPA 为

$$m_1: m_1(A) = 0.9 - \alpha, m_1(B) = \alpha, m_1(C) = 0.1$$

$$m_2: m_2(A) = \beta, m_2(B) = 0.9 - \beta, m_2(\Theta) = 0.1$$

$$m_3: m_3(A) = 0.05, m_3(B) = 0.1, m_3(C) = 0.8,$$

$$m_3(\Theta) = 0.05$$

其中， $\alpha \in [0,0.9]$ ， $\beta \in [0,0.9]$ 。令

$$q_1 = \text{BEMD}(m_1, m_2) + \text{BEMD}(m_1, m_3) - \text{BEMD}(m_2, m_3)$$

$$q_2 = \text{BEMD}(m_1, m_2) + \text{BEMD}(m_2, m_3) - \text{BEMD}(m_1, m_3)$$

$$q_3 = \text{BEMD}(m_1, m_3) + \text{BEMD}(m_2, m_3) - \text{BEMD}(m_1, m_2)$$

如图 4 所示，随着变量 α 和 β 分别从 0 增加到 0.9， $q_i \geq 0, i = 1,2,3$ ，可以看到 BEMD 满足三角不等式。

为了进一步说明 BEMD 的有效性，下面通过例 8 考查在焦元和质量都发生变化的情况下 BEMD 的变化趋势。

例 8 本例采用文献[20]的例子，假设识别框架 $\Theta = \{S_1, S_2, \dots, S_{19}\}$ 中存在 2 个证据 m_1 和 m_2 ，它们的

BPA 分别为

$$m_1: m_1(S_2) = 0.95, m_1(X_t) = 0.05$$

$$m_2: m_2(S_2) = \lambda, m_2(X_t) = 1 - \lambda$$

其中, X_t 是一个变量集合, $X_t = [S_1, \dots, S_t]$, $t = 1, \dots, 19$; λ 的变化范围为 $[0.05, 0.95]$ 。

m_2 都对 S_2 有相对较高的支持度, 所以当 λ 的值不变时, 证据 m_1 与 m_2 之间的冲突程度相对较低。随着焦点 X_t 的基数 t 从 2 增加到 19, 证据间的冲突度量逐渐增加, 这与直观分析相符。图 5(a)~图 5(d) 均表明 BEMD 符合 ECSMF 的不反直观性。

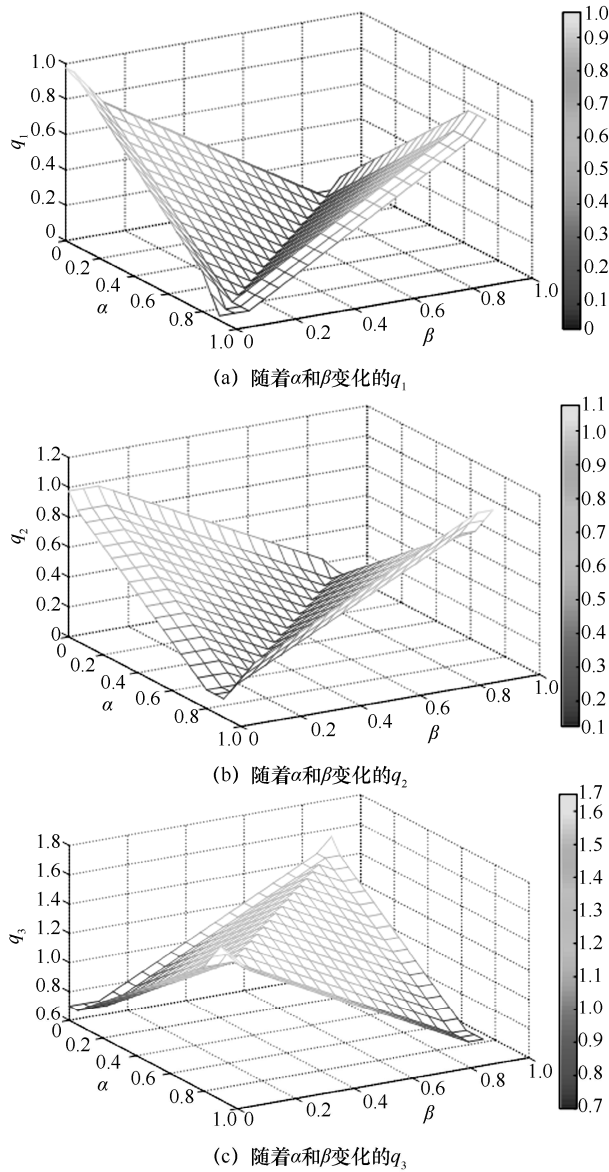


图4 随着 α 和 β 变化的 q_1 、 q_2 和 q_3

由图 5(a)和图 5(d)可知, 无论 λ 和 X_t 如何变化, $BEMD(m_1, m_2) \in [0, 1]$ 。从图 5(b)中可以看出, 无论集合 X_t 如何变化, m_1 与 m_2 之间的冲突程度都会随着 λ 的增加而减小。从图 5(c)中可以看出, 在 λ 固定的情况下, 当 $t=1$ 时, S_2 和 X_t 之间没有交集, 证据 m_1 与 m_2 之间容易出现高度冲突的情况; 当 $t=2$ 时, $X_t = \{S_1, S_2\}$ 和 S_2 之间的相关程度最高, 证据 m_1 与

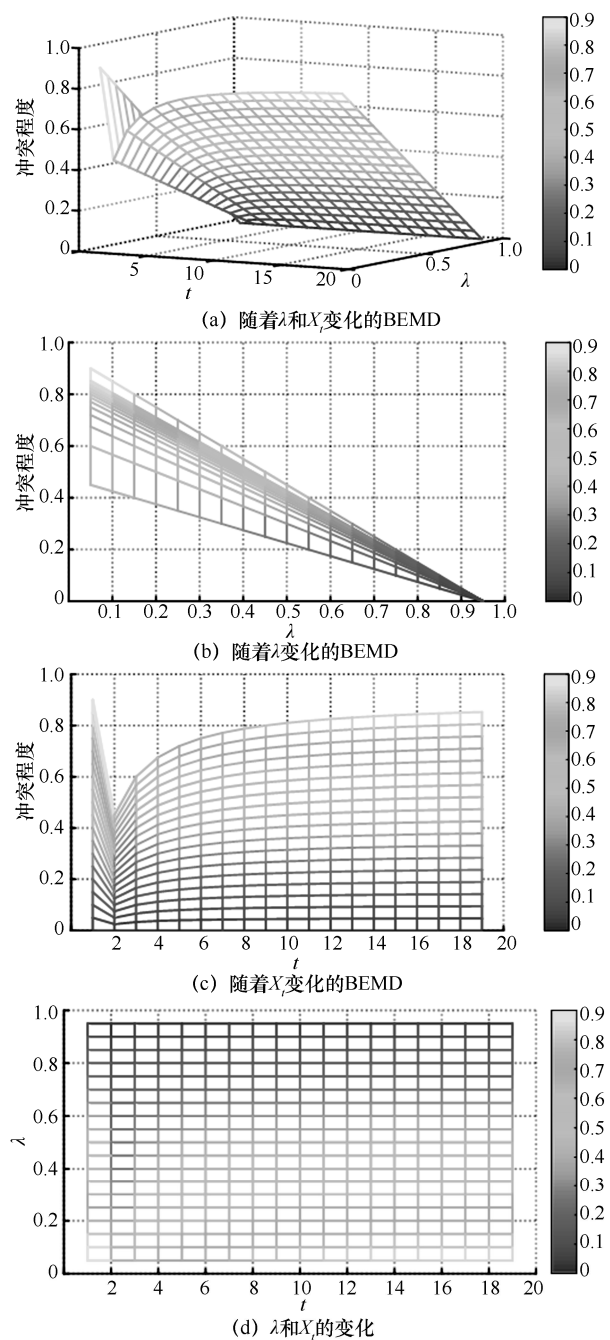


图5 在 λ 和 X_t 不同情况下的冲突度量

5 结束语

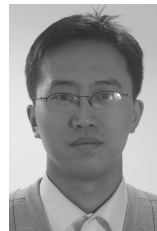
D-S 证据理论是一种重要的多传感器信息融合决

策方法,然而,在处理高度冲突证据时往往会得出反直观的结论,在解决该问题时首先需要对证据冲突进行准确的度量。为了度量准确,本文首先提出 ECSMF 的期望特征,然后根据期望特征的要求,提出了一种基于 EMD 的证据冲突度量方法,即 BEMD,该方法使用 Jaccard 集合距离对 EMD 进行优化,不需要预先对证据进行修正,也不要求不同证据中的焦元数量完全相同,并且可以直接处理带复合焦元的 BPA,理论证明和实例仿真验证了所提方法可以有效地度量证据间的冲突大小。证据理论的冲突度量是研究冲突证据合成方法的基础,而本文的冲突度量方法中并未涉及证据的合成方法,在未来的工作中,如何基于 BEMD 拓展冲突证据合成规则将是笔者主要的研究内容。

参考文献:

- [1] NAGARANI N, VENKATAKRISHNAN P, BALAJI N. Unmanned Aerial vehicle's runway landing system with efficient target detection by using morphological fusion for military surveillance system[J]. *Computer Communications*, 2020, 151: 463-472.
- [2] MUZAMMAL M, TALAT R, SODHRO A H, et al. A multi-sensor data fusion enabled ensemble approach for medical data from body sensor networks[J]. *Information Fusion*, 2020, 53: 155-164.
- [3] LIN K, LI Y H, SUN J C, et al. Multi-sensor fusion for body sensor network in medical human-robot interaction scenario[J]. *Information Fusion*, 2020, 57: 15-26.
- [4] JIANG M Q, LIU J P, ZHANG L, et al. An improved stacking framework for stock index prediction by leveraging tree-based ensemble models and deep learning algorithms[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2020, 541: 122272.
- [5] FEI L G, DENG Y. A new divergence measure for basic probability assignment and its applications in extremely uncertain environments[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2019, 34(4): 584-600.
- [6] DENGEX T, SHENOY P P. An interval-valued utility theory for decision making with Dempster-Shafer belief functions[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2020, 124: 194-216.
- [7] PAN Y, ZHANG L M, WU X G, et al. Multi-classifier information fusion in risk analysis[J]. *Information Fusion*, 2020, 60: 121-136.
- [8] BOUKEZZOULA R, COQUIN D, NGUYEN T L, et al. Multi-sensor information fusion: combination of fuzzy systems and evidence theory approaches in color recognition for the NAO humanoid robot[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2018, 100: 302-316.
- [9] GHOSH N, PAUL R, MAITY S, et al. Fault matters: sensor data fusion for detection of faults using Dempster-Shafer theory of evidence in IoT-based applications[J]. *Expert Systems With Applications*, 2020, 162: 113887.
- [10] FU W, YU S, WANG X. A novel method to determine basic probability assignment based on adaboost and its application in classification[J]. *Entropy (Basel, Switzerland)*, 2021, 23(7): 812.
- [11] ZADEH L A. Review of Shafer's: a mathematical theory of evidence[J]. *AI Magazine*, 1984, 5: 81-83.
- [12] 宋亚飞, 王晓丹, 雷蕾, 等. 基于相关系数的证据冲突度量方法[J]. *通信学报*, 2014, 35(5): 95-100.
- [13] 孙贵东, 关欣, 衣晓, 等. 冲突证据的相关系数度量方法[J]. *通信学报*, 2018, 39(12): 30-39.
- [14] SUN G D, GUAN X, YI X, et al. Correlation coefficient measurement for conflict evidence[J]. *Journal on Communications*, 2018, 39(12): 30-39.
- [15] LIU W R. Analyzing the degree of conflict among belief functions[J]. *Artificial Intelligence*, 2006, 170(11): 909-924.
- [16] 郭兴林, 孙振晓, 周昱瑶, 等. 基于 Pignistic 概率转换和奇异值分解的证据冲突度量方法[J]. *通信学报*, 2021, 42(4): 150-157.
- [17] GUO X L, SUN Z X, ZHOU Y Y, et al. Evidence conflict measurement method based on Pignistic probability transformation and singular value decomposition[J]. *Journal on Communications*, 2021, 42(4): 150-157.
- [18] CAI Q X, GAO X Z, DENG Y. Pignistic belief transform: a new method of conflict measurement[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 15265-15272.
- [19] JOUSSELME A L, GRENIER D, BOSSÉ É. A new distance between two bodies of evidence[J]. *Information Fusion*, 2001, 2(2): 91-101.
- [20] 邓勇, 王栋, 李齐, 等. 一种新的证据冲突分析方法[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(6): 839-844.
- [21] DENG Y, WANG D, LI Q, et al. A new method to analyze evidence conflict[J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(6): 839-844.
- [22] XIAO F Y. Multi-sensor data fusion based on the belief divergence measure of evidences and the belief entropy[J]. *Information Fusion*, 2019, 46: 23-32.
- [23] XIAO F Y. A new divergence measure for belief functions in D-S evidence theory for multisensor data fusion[J]. *Information Sciences*, 2020, 514: 462-483.
- [24] 李军伟, 刘先省, 胡振涛. 基于 Einstein 算子的证据冲突度量方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2017, 39(12): 2659-2664.
- [25] LI J W, LIU X X, HU Z T. Measurement of evidence conflict based on Einstein operator[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2017, 39(12): 2659-2664.
- [26] JIANG W. A correlation coefficient for belief functions[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2018, 103: 94-106.
- [27] RUBNER Y, TOMASI C, GUIBAS L J. The earth mover's distance as a metric for image retrieval[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2000, 40(2): 99-121.
- [28] YANG J, WANG G Y, ZHANG Q H. Knowledge distance measure in multigranulation spaces of fuzzy equivalence relations[J]. *Information Sciences*, 2018, 448/449: 18-35.
- [29] QU Y P, XU Z, SHANG C J, et al. Inconsistency guided robust attribute reduction[J]. *Information Sciences*, 2021, 580: 69-91.
- [30] LEVANDOWSKY M, WINTER D. Distance between sets[J]. *Nature*, 1971, 234: 34-35.

[作者简介]



王欣(1978—),男,河北保定人,博士,黑龙江大学副教授、硕士生导师,主要研究方向为信息融合决策与估计、不确定性系统推理与建模。

付威(1995—),男,山西太原人,黑龙江大学硕士生,主要研究方向为信息融合决策与不确定性推理。